Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Dantzer
Rombaldi, Exercices et pb corrigés
Dreveton, Lhabouz
Gourdon Analyse

I - Fonction exponentielle et fonctions associés [Dan]

1. Autour de l'exponentielle

Définition 1.1 On définit la fonction exponentielle comme la fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini.

Proposition 1.2 La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\exp z| = \exp(\mathrm{Re}(z))$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\exp z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

Proposition 1.3 La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'unique fonction solution du problème de Cauchy $y' = y$, $y(0) = 1$.

Remarque 1.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = [\exp(1)]^x$, ce qui justifie la notation $e^x = \exp(x)$.

Proposition 1.5 La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ est une fonction bijective.

2. Fonctions associés

Définition 1.6 On définit les applications cosinus et sinus, notées cos et sin, comme : $\cos : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Re}(e^{it})$ et $\sin : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Im}(e^{it})$.

Proposition 1.7 Les fonctions cos et sin vérifient :

- $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
- $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- $\cos(t_1+t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 . \sin t_2$
- $\sin(t_1+t_2) = \sin t_1 . \cos t_2 + \sin t_2 . \cos t_1$

Proposition 1.8 Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos' t = -\sin t$ et $\sin' t = \cos t$.

Proposition 1.9 L'application cosinus est paire et 2π-périodique, l'application sinus est impaire et 2π-périodique.

Proposition 1.10 La restriction de l'application cosinus au segment $[0,\pi]$ réalise une bijection de ce segment sur $[-1,1]$, on note arccos sa fonction réciproque.

La restriction de l'application sinus au segment $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de ce segment sur $[-1,1]$, on note arcsin sa fonction réciproque.

Définition 1.11 On peut également définir ch et sh par $\mathrm{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Proposition 1.12 La fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective, d'inverse notée argsh. Tandis que $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,+\infty[$ est bijective, d'inverse notée argch.

II - La fonction Γ d'Euler

1. Définition et premières propriétés [Rom]

Définition 2.1 On pose $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On définit alors la fonction Γ d'Euler comme $\Gamma : z \in \Omega \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$.

Proposition 2.2 La fonction Γ est bien définie sur Ω et y est holomorphe.

Théorème 2.3 (Bohr - Mollerup) La fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est l'unique fonction qui vérifie les conditions :

(i) $f(1) = 1$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = x f(x)$ (iii) f est logarithme convexe

Application 2.4 Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

développement 1

Proposition 2.5 La fonction Γ vérifie les propriétés :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ (ii) $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

(iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}$

Théorème 2.6 (formule des compléments) Pour tout $x \in]0,1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

2. Applications de la fonction Γ [Rom] [Dre]

Application 2.7 Pour tous $x, y > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Conséquence 2.8 Pour tout $x \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ et $\int_0^{\pi/2} \tan^{2x-1}(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2\sin \pi x}$.

Application 2.9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\sin^{2n}(t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma'(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ )^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma'(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)^2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln 2\right)$.

Application 2.10 Le volume de la boule unité vaut $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Application 2.11 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > -1$, $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^z\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)}$.

Conséquence 2.12 (Intégrale de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$ et $W_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$, où $W_p = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^p\, d\theta$.

Application 2.12 Pour $k > 0$, $\theta > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k}$ définit une densité de probabilité.

Elle définit une loi $\Gamma(k,\theta)$, dite de Gamma, d'espérance $k\theta$ et de variance $k\theta^2$.

III _ La fonction ζ [Gou]

Définition 3.1 On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 1\}$. On définit la fonction ζ de Riemann par $\zeta : s \in \Omega \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Proposition 3.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in D$, $\zeta(s) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} = s\int_n^{+\infty}\frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}}\, dx + \frac{n^{1-s}}{s-1} - \frac{n^{-s}}{2}$.

Corollaire 3.3 La fonction ζ est prolongeable par continuité sur $\overline{\Omega}\setminus\{1\}$ où $\overline{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq 1\}$.

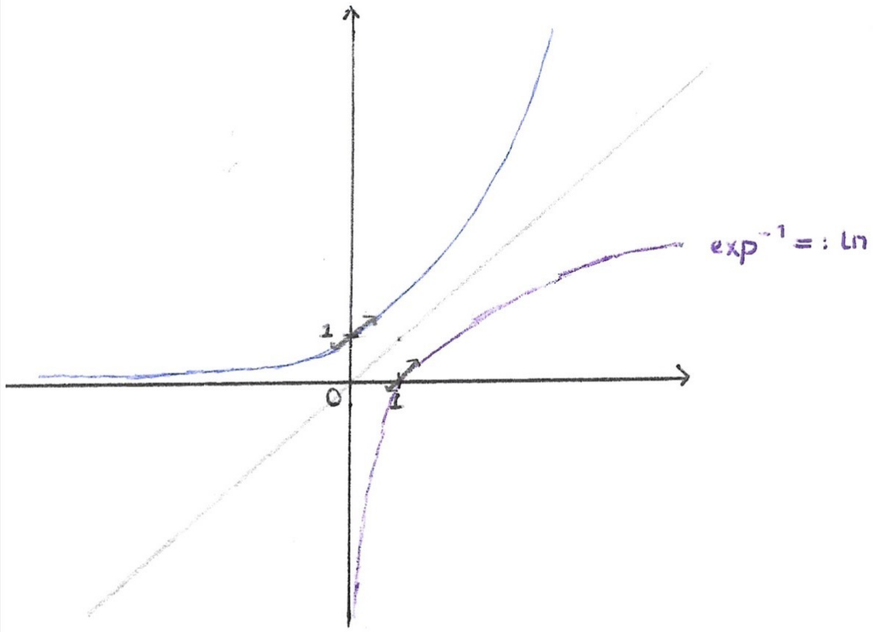
Proposition 3.4 On désigne par $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers ordonnés dans l'ordre croissant. Alors, pour tout $s \in \Omega$, on a l'identité d'Euler, $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - p_k^{-s})^{-1}$.

Application 3.5 On a : $\sum_{k=1}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_k} = +\infty$.

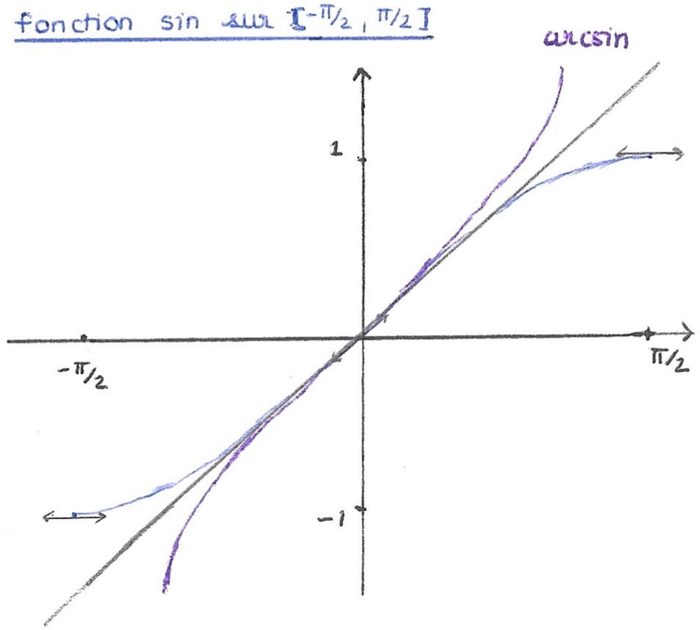
Corollaire 3.6 Pour tout $s \in \Omega$, $\zeta(s) \neq 0$.

Annexe

fonction exp sur $\mathbb{R}$



fonction sin sur $[-\pi/2, \pi/2]$



fonction Γ sur $]0, +\infty[$